

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ НЕВОЗМОЖНОСТЬ ДЕМОКРАТИИ

В 1972 году Нобелевскую премию по экономике присудили американскому математику Кеннету Эрроу за исследование «Социальный выбор и индивидуальные ценности». Под таким скромным названием в наш мир вошло сенсационное открытие, положившее конец мечтам об идеальной демократии. Выделив пять непереносимых условий демократических выборов, как механизма выявления воли большинства избирателей, Эрроу доказал: в принципе невозможна избирательная система, в которой не нарушалось бы, по крайней мере, одно из этих условий! Причем, дефекты **присущи** не какому-то конкретному механизму выборов, а **любому** из них, **принципиально**.

Это открытие произвело впечатление разорвавшейся бомбы. «Оказывается, лучшие умы человечества занимаются поисками химеры, зияющей на внутреннем логическом противоречии исходных принципов, - писал один из тогдашних обозревателей, - Теперь учёные во всем мире пытаются спасти то, что может быть спасено от разрушительного открытия Эрроу, занявшего в математической политологии такое же место, какое занимает в математической логике открытая Куртом Гёделем в 1931 году теорема о невозможности построения непротиворечивой математической теории, содержащей аксиомы арифметики...».

Справедливости ради заметим: американец сделал своё открытие не на пустом месте. С дефектами демократической системы выявления воли большинства путём подсчёта голосов столкнулся в XVIII веке маркиз Кондорсе (1743-1794 гг.), философ, математик и политический деятель, казнённый во время Французской революции.

В конце Века просвещения, когда французские аристократы усердно экспериментировали с азартными играми, рождая при этом теорию вероятностей, Кондорсе описал *эффект, носящий его имя и позволяющий меньшинству на вполне демократических выборах навязать свою волю большинству, проведя либо непопулярного кандидата, либо непопулярное решение*.

Эффект Кондорсе основан на том, что непопулярные вещи у разных избирателей **непопулярны по-разному**, и математически описывается как парадокс нетранзитивности.

Проясним сущность этого парадокса на примере ситуации, которая может сложиться в результате выборов.

В Государственной думе после выборов сформировались три равномогущих центра силы, это - языком бессмертного "Капитала" - буржуа, пролетарии и деклассированные.

И вот собираются свежизбранные нардепы на свое первое заседание и принимаются решать оргвопрос. В итоге, как мы видели в прямом эфире, демократическая эта процедура заканчивается конфузом, так как ни одна из названных третей не поладила с двумя остальными.

Теперь допустим, что решили думцы исправить нехорошую ситуацию и собираются снова все вместе на специальное закрытое заседание по достижению примирения и согласия. Поскольку вопрос архиважный, голосование по нему им надо провести квалифицированным большинством (с перевесом в 2/3), а поскольку вопрос к тому же еще и архисрочный, то все решения по нему надо принять в течение заседания. В этих-то условиях теоретически как раз и оказывается возможной ситуация, описанная просвещенным маркизом еще в 1785 году.

Вначале нардепы дружно голосуют за обязательное исполнение всех своих решений. Далее переходят к дележке постов, и, ясное дело, страсти накаляются. Выступает, положим, известный своим темпераментом г-н Ж. и вносит такое предложение: за многочисленные злодеяния посадить в тюрьму всех представителей пролетариата в Думе, а "золото партии" и все прочее у них отнять и поделить в интересах народа, начав с улучшения материального положения народных избранников. Предложение логичное, и оно, естественно, проходит двумя третями голосов, составляемыми буржуа и деклассированными.

В ответном выступлении вождь пролетарских масс предлагает посадить, наконец, в тюрьму за хулиганские выходки г-на Ж., а заодно и всех прочих деклассированных - в силу очевидной исторической бесперспективности их движения. Нажитые указанными господами в результате политических махинаций богатства экспроприировать в интересах народа и его избранников (отнять и поделить, см. выше). Понятно, что и это предложение тоже проходит под бурные, продолжительные аплодисменты 2/3 депутатского корпуса, составляемых на этот раз временным тактическим союзом буржуа и пролетариев.

Далее снова голосование все по той же самой схеме: посадить, отнять и поделить, но уже по отношению к представителям капитала голосами пролетариев и деклассированных. В том же голосовании проходит предложение о некотором улучшении условий содержания осужденных и увеличении им количества передач и свиданий. К обеденному перерыву новая Государственная дума уже может быть в полном составе приговорена к длительным срокам тюремного заключения и готова к отбытию в места исполнения наказания.

Такая гипотетическая ситуация называется циклом Кондорсе (Condorcet cycling) и, как легко заметить, вовсе не зависит от степени совершенства технологических процедур.

Современник маркиза Кондорсе шевалье Жан Шарль де Борда (1733-1799) ещё во времена Великой французской революции выяснил, что **никакого универсального способа выявления коллективных предпочтений нет и не может быть в принципе**. Можно привести множество разумных правил голосования (правила абсолютного и относительного большинства, правило отсеивания наихудших, правило Борда и т. д.), но их результаты могут быть прямо противоположными: **победитель по одному из правил может оказаться худшим по другому**. Вероятно, именно в этом кроется одна из причин всегдашнего недовольства избирателей результатами любых голосований: дело в том, что, проголосовав по одной системе, люди зачастую оценивают результат, исходя из других, более выгодных для них принципов. Из исследований Ж.-Ш. Борда следует, что *в процессах коллективного выбора его участники могут добиваться лучших для себя исходов, сообщая другим участникам лишь выгодную для себя информацию о своих предпочтениях*. В этой связи возникала проблема построения неманипулируемого механизма выбора, который бы делал дезинформацию невыгодной участникам. Однако **в 1973 году Жиббард доказал, что универсальных неманипулируемых и недиктаторских механизмов не существует**.

Веком позже этот эффект переоткрыл специалист по математической логике преподобный Чарльз Доджсон (он же Льюис Кэрролл, автор "Алисы в стране чудес") и описал в язвительных памфлетах о выборах, и не где-нибудь на местечковой живодерне, но в самом Оксфордском университете.

В 1940-х годах подобным же наблюдением озадачил политиков английский экономист Л. Блэк, исследовавший эффективность принятия решений во всякого рода комитетах.

Приложение 1

Эффект Кондорсе

Многие прикладные разработки маркиза Кондорсе, в частности «Эффект Кондорсе», актуальны и в наши дни.

Несомненно, прикладная часть научной деятельности Кондорсе представляет наибольший интерес для современных социологов, так как влияние прикладной социологии на решение социальных, экономических и политических вопросов неоспоримо.

Кондорсе уже в то время предугадывал широкое применение математических методов в социальных науках. Действительно, на данный момент при анализе эмпирических данных применяется огромное множество разнообразных математических методов, формальных процедур, эффективность применения которых подтверждена практикой решения многих прикладных задач в разных областях человеческой деятельности.

В процессе изучения различных методов голосования маркизом был открыт феномен, который в последствии был назван его именем. В анализе известного «эффекта Кондорсе» мы видим возникновение совершенно новых методов изучения социальных феноменов для того времени, которые остаются актуальными и в настоящий момент.

Эффект Кондорсе проявился в его исследованиях относительно форм выборов. Он выделяет два типа влияний на результат голосования:

1. Возникающие вследствие горизонтальных связей. «Преобладающая персона» («лидер мнения» у Лазарсфельда), тот, кого вследствие его статуса прислушиваются окружающие его люди, ориентирует голоса других индивидов.

2. Влияния, возникающие вследствие вертикальных связей. Голосование, по мнению Кондорсе, не изолировано от другого голосования. Предыдущее голосование накладывает свой отпечаток на результаты проходящего голосования. Голоса взаимосвязаны один с другим.

При этом он делает вывод о том, что наиболее простым и не вызывающим сомнений является бинарный выбор (из двух кандидатов). Когда индивидуум должен ответить “да” или “нет”¹, выбор ясен: программа кандидата А получила 52%, программа В — 48%, следовательно, выигрывает голосование А. Гораздо более сложным является случай, когда необходимо сделать свой выбор среди трех и более кандидатов², расставив приоритеты в иерархическом порядке. Рассмотрим более подробно этот феномен, который описан в книге Кондорсе “О выборах”.

Необходимо расставить трех кандидатов А, В и С в порядке предпочтения их программ. Например, в выборе принимает участие электорат в 60 человек. Допустим, что голоса распределились следующим образом:

Предпочтения кандидатам:	ABC	BCA	CAB	ACB	CBA	BAC
Количество голосов:	20	18	1	1	15	5

Кандидат А выигрывает, так как комбинация ABC получает наибольшее количество голосов — 20. Однако **большая часть электората голосует не в пользу первенства А (18+1+15+5=39), и даже, более того, ставит его программу на последнее место в комбинациях (18+15=33)!**

Если сделать разделение кандидатов на пары, то получится следующая картина:

Предпочтения кандидатам:	Количество голосов:	
A>B	22	
B>A	38	B>A
B>C	43	
C>B	17	B>C
A>C	26	
C>A	34	C>A

Таким образом, получается следующий итог: B>C>A. Следовательно, мы имеем комбинацию BCA и **побеждает кандидат В**.

Однако Кондорсе находит и в этом решении новую сложность. Проведем аналогичное голосование с другим электоратом, количество которого также 60 человек. Получаем картину в целом аналогичную первому случаю, но распределение голосов несколько иное:

Предпочтения кандидатам:	ABC	BCA	CAB	ACB	CBA	BAC
Количество голосов:	20	17	10	3	8	2

Сделаем вновь разделение кандидатов на пары. Получится следующая картина:

Предпочтения кандидатам:	Количество голосов:	
A>B	33	
B>A	27	A>B
B>C	39	
C>B	21	B>C
A>C	25	
C>A	35	C>A!

В итоге имеем: B<A<C, но при этом A<C<B и C<B<A. **Победителя невозможно определить! Ни один из кандидатов не является безусловно предпочитаемым перед другими двумя.**

Таким образом эффект Кондорсе выражается следующим образом. Электорат может сформировать противоречивый коллективный ответ, на основе индивидуальных связанных ответов. Иными словами, если рассматривать электорат как некий усредненный тип человека, то этот **”средний человек” склонен к принятию противоречивых решений.**

Эффект Кондорсе проявляется и при принятии мажоритарных решений двумя третями голосов. Рассмотрим модель парламента поделенного поровну между тремя фракциями. Назовем

¹ Поскольку всегда есть три выбора: "за", "против", "воздержался", бинарной системы в принципе не существует.

² Например, традиционные "правые", "левые", "центр".

их условно “Либералы” — Л, “Коммунисты” — К, “Социалисты”— С. Если К поддерживают решения предлагаемые Л, но не С, Л — С, но не К, а С — К, но не Л, то вновь нарушается свойство транзитивности: $K > L$, $L > C$, но $C > K$.

Исследователь творчества Кондорсе К. Эрроу вывел следующую теорему: “Демократия не создает удовлетворительных условий для того, чтобы избежать проявления эффекта Кондорсе” [Arrow K. Preferences individuelles et choix collectifs. Paris, 1951. P.192].

Открытие эффекта Кондорсе является безусловно значимым и сегодня, хотя бы потому, что знание о нем необходимо как для социолога, так и для простого человека в наше время. Так, можно увидеть использование этого метода на бирже, при оценке стоимости предприятий, при исследовании рынка стоимости ценных бумаг, при принятии разнообразных экономических решений и т.д.

Но кажется наиболее важным знание эффекта Кондорсе в политике, так как ***эффект Кондорсе может быть использован при определенных условиях как средство для недобросовестного достижения политических целей.***

Рейтинги кандидатов, например, составляется именно методом попарных сравнений, где не исключено проявление нарушения транзитивности. И даже если это только статистические данные социологического опроса, нельзя забывать о косвенном влиянии таких сведений на решение избирателей в будущих выборах.

Таким образом, знание об эффекте Кондорсе должно помочь оградить общество от невежественных политических и экономических решений.

Приложение 2

Справка о теореме невозможности Эрроу (Кеннет Джозеф)

Наибольшую известность принесла Эрроу (нобелевский лауреат 1972 г.) его первая книга «Социальный выбор и индивидуальные ценности» (Social Choice and Individual Values), опубликованная в 1952 году. В ее основу была положена его докторская диссертация. Опираясь на предшествующие работы в этой области П. Самуэльсона и экономиста из Гарварда А. Бергсона, Эрроу пытался сформулировать условия, при которых из индивидуальных предпочтений рациональным или демократическим путем могут быть выведены групповые решения.

Эрроу пришел к выводу, «что социальная функция выбора, выражающая связь между индивидуальными предпочтениями и социальным выбором, должна отвечать четырем требованиям: переходности (если социальный выбор А предпочтительней, чем выбор Б, а выбор Б - чем выбор С, то выбор А предпочтительней, чем выбор С); эффективности по Парето (альтернативное решение не может быть выбрано, если при этом существует другая реализуемая альтернатива, улучшающая жизнь некоторых членов общества и не ухудшающая ничьих условий жизни); отсутствию диктатуры, навязывающей свои предпочтения всему обществу; независимости посторонних альтернатив (выбор между А и Б остается неизменным, если вводится третий, логически допустимый, но неосуществимый вариант С)». Эрроу показал, что все четыре условия внутренне противоречивы и противоречат также друг другу, откуда следовало, что ни одна социальная функция выбора не может соответствовать всем требованиям одновременно. Подробнее об этом написано ниже.

Социальный выбор и индивидуальные ценности.

Можно ли создать такую систему голосования, чтобы она была рациональной, решающей и демократичной одновременно? Специалисты в области общественных наук, философы и экономисты, исследовавшие этот вопрос, склоняются к отрицательному ответу. Перечисленные характеристики идеальной системы голосования на самом деле несовместимы. Способ голосования может быть избавлен от произвольности, безвыходных положений или неравноправия, но не может избежать этих недостатков одновременно. Систематически проводимый анализ этой дилеммы привел к более глубокому пониманию существующих систем голосования и с течением времени может привести к открытию более совершенных систем.

Кеннет Эрроу начал проводить аксиоматическое исследование рациональных процедур голосования. Он выдвинул ***пять аксиом, которым должна удовлетворять любая процедура комбинирования или объединения индивидуальных предпочтений, чтобы образовать коллективное суждение, и доказал, что единственные процедуры, которые отвечают всем***

этим аксиомам, сосредоточивают всю власть в руках одного индивидуума. Нельзя найти метод, удовлетворяющий всем аксиомам Эрроу, который не был бы диктаторским - и не за недостатком изобретательности, а потому что такого не существует. Эта работа была в числе тех, за которые он получил Нобелевскую премию.

В течение последних 30 лет ученые не переставали исследовать аксиомы Эрроу в попытке обойти его «теорему невозможности демократии», стремясь ослабить сформулированные им требования. Эта проблема вызвала широкий интерес, поскольку она тесно связана с ключевыми вопросами экономики, философии, общественных наук.

Перед философами она встает при анализе практического значения утилитаризма - этической доктрины, утверждающей, что правильность действий зависит от их последствий для народного благоденствия, и требующей найти метод для объединения индивидуальных предпочтений.

Ученые, занимающиеся общественными науками, встречаются эту проблему при определении или оценке правил голосования для комитетов или законодательных органов.

Экономисты сталкиваются с ней при изучении нормирования и других нерыночных методов распределения ресурсов. Эта задача очень важна при нормативных экономиках, поскольку при определении допустимых границ вмешательства правительства в сферу деятельности свободного рынка решающим является понимание потенциального спектра альтернатив вплоть до полного невмешательства.

Принцип большинства голосов заслуживает, чтобы его рассмотрели в первую очередь среди процедур объединения индивидуальных предпочтений. В числе его достоинств - простота, равноправие и весомость, обусловленная *традицией*. По существу принцип большинства - это процедура сопоставления пар кандидатов или альтернатив. Однако при сопоставлении более двух альтернатив принцип большинства сталкивается с трудностью, на которую ещё 200 лет назад указал маркиз Кондорсе.

Отмеченная Кондорсе трудность ныне известна под названием «парадокса голосования». Предположим, что комитет, состоящий из Тома, Дика и Гарри, должен расположить в порядке предпочтения трех кандидатов А, Б, С. Том располагает их А, Б, С, Дик - Б, С, А, а Гарри - С, А, Б. Подсчет голосов по принципу большинства для выбора из пар кандидатов приводит к циклу: А побеждает Б, Б побеждает С, а С побеждает А - все двумя голосами против одного. Этот цикл - простейший пример парадокса голосования Кондорсе.

Когда возможно более двух альтернатив, нужен новый принцип для проведения выборов из попарных упорядочений. Конфигурации предпочтений, которые приводят к парадоксу голосования, создают трудность при каждом естественном подходе. **Простейший метод состоит в выборе альтернативы, которая не побивалась бы никакой другой.**³ Однако при наличии **парадокса голосования**⁴ такой альтернативы не существует, поскольку каждая альтернатива, или кандидат, проигрывает какой-либо другой.

Второй способ перехода от попарного упорядочения к выборам состоит в определении последовательности, в которой берутся пары альтернатив. Например, последовательность может предусматривать вначале голосование за А или Б, а затем за победившего кандидата или С. При этой последовательности комитет, состоящий из трёх членов, вначале проголосует за А против Б, а на втором этапе С победит А. Легко проверить, что при любой из трех возможных последовательностей в этой ситуации альтернатива, рассмотренная последней, победит: **последовательность предопределяет результат.** Таким образом, циклы голосования представляют собой трудность не только внешне, но и по существу. **Когда случается цикл, выбор окончательного победителя в лучшем случае произволен (если последовательность выбрана произвольным образом), а в худшем случае определяется махинациями того, кто задает последовательность.**

Другие возможности для стратегических маневров возникают, когда голосующий может изменить последовательность голосования введением новых альтернатив. Предположим (при том же самом комитете), что С представляет собой статус-кво, а Б - альтернативу, образовавшуюся в

³ То есть альтернативы монархической.

⁴ То есть в республиканско-демократических условиях.

результате внесения предложения. При этих двух возможных альтернативах Б победит С, и Гарри (который предпочитает кандидата С кандидату Б) будет разочарован. Однако если он сможет внести поправку А к предложению Б, то А победит Б при первоначальном голосовании, а на втором этапе А проиграет С. Таким образом, Гарри добьётся принятия предпочитаемой им альтернативы.

Даже если нельзя ввести новые альтернативы, а последовательность невозможно изменить, голосующие могут воспользоваться в своих целях неправильным представлением своих предпочтений. Снова рассмотрим последовательность, при которой С берется в последнюю очередь. Если каждый член комитета голосует в соответствии со своим истинным предпочтением при каждом голосовании, выигрывающая альтернатива С стоит на последнем месте среди предпочтений Тома. Предположим, однако, что Том голосует за Б вместо А в первоначальном голосовании, тогда Б побеждает, побивая С на втором этапе. Таким приемом он заблокировал выбор альтернативы, которая ему нравилась меньше всего.

Аксиоматический подход Эрроу.

Циклические коллективные предпочтения являются задачами с произвольными исходными данными и стратегическим поведением. Они возникают либо когда предпочтения порождаются принципом большинства, как в примере выше, либо в какой-нибудь другой процедуре голосования. Таким образом, перед Эрроу встал вопрос: возникают ли противоречивые коллективные предпочтения лишь при принципе большинства и тесно связанных с ним методах или они присущи всем системам голосования? Для ответа на этот вопрос он должен был бы рассмотреть различные процедуры голосования и для каждой из них проверить, не порождают ли какие-нибудь конфигурации индивидуальных упорядочений предпочтений циклы или коллективные предпочтения с какими-нибудь другими неприемлемыми свойствами. Сложность заключалась в том, что ему пришлось бы исследовать огромное количество процедур объединения, сильно различающихся теми ролями, которые в них приписывались отдельным голосующим, и критериями, которые использовались для упорядочения альтернатив.

По необходимости Эрроу вместо этого выбрал аксиоматический подход. Он сформулировал задачу как выбор «конституции», т.е. правила, приписывающего коллективное упорядочение альтернатив каждой конфигурации упорядочений индивидуальных предпочтений. Конституция определяет, является ли альтернатива предпочитаемой, лишней или безразличной по отношению к каждой другой. (Две альтернативы считаются безразличными, если общество рассматривает их как одинаково привлекательные.) Эрроу сузил множество возможных конституций, наложив пять требований, которые (как он утверждал) являются необходимыми свойствами каждого этически приемлемого метода объединения. Затем он охарактеризовал класс конституций, которые удовлетворяют всем пяти свойствам.

Первая аксиома Эрроу.

Универсальность требует, чтобы конституция отражала **каждую** возможную конфигурацию предпочтений голосующих. Эрроу утверждал, что, поскольку нельзя предсказать все разновидности конфликта, который может возникнуть в ходе действия правила голосования, общество не должно принимать конституции, которая окажется несостоятельной хотя бы при некоторых структурах предпочтений голосующих. Поэтому, как подчеркивал Эрроу, общество должно настаивать на такой конституции, которая была бы достаточно общей, чтобы разрешить все возможные споры.

Вторая аксиома Эрроу.

Это аксиома единогласия. Управляет действием конституции, когда нет согласия между избирателями. Она устанавливает, что для конфигурации предпочтений, при которой каждый индивидуум предпочитает альтернативу А альтернативе Б, коллективное упорядочение должно быть таким же. Если придерживаться точки зрения, при которой считается, что **общественное упорядочение должно отражать предпочтения членов этого общества, то трудно спорить с условием единогласия**, которое разрешает проблему в случае, который безусловно является простейшим при объединении предпочтений.

Третья аксиома Эрроу.

Независимость требует, чтобы **коллективное упорядочение любой пары альтернатив зависело лишь от индивидуальных упорядочений этих двух альтернатив**. Как бы не менялись

индивидуальные предпочтения других альтернатив, если каждое из индивидуальных упорядочений А и Б остается неизменным, коллективное упорядочение А и Б так же не меняется.

Конституция, удовлетворяющая условию независимости, ограничивает информацию об индивидуальных упорядочениях, требующуюся для определения коллективного упорядочения пары альтернатив. В частности, информация об индивидуальных предпочтениях не представленных альтернатив для коллективного упорядочения рассматриваемых альтернатив; это является большим преимуществом, когда сложно или дорого выявлять индивидуальные упорядочения предпочтений. Без условия независимости конституция должна была бы определять, какие другие альтернативы являются существенными для определения коллективного упорядочения А и Б и как индивидуальные предпочтения для этих альтернатив отражаются на коллективном упорядочении А и Б.

Одна распространенная процедура, упорядочение судейских голосов, нарушает условия независимости. (Эта система обычно используется спортивными отделами газет для определения мест, занятых спортивными командами колледжей, и передачи информации комментаторами по телефону.)

Когда имеются три альтернативы, это правило коллективного выбора приписывает каждому кандидату три балла, если он оказался первым в списке некоторого голосующего, два балла, если он оказался вторым, и один балл, если третьим. Коллективное упорядочение определяется суммированием баллов каждого кандидата и расположением их в порядке суммарных баллов. В комитете, состоящем из трех членов, каждый кандидат получает шесть баллов, и, таким образом, комитет безразличен по отношению к этим трем кандидатам.

Предположим, что свое упорядочение кандидатов Том изменяет с А, Б, С на А, С, Б. Хотя ни один из членов комитета не изменил своего упорядочения А и Б, описываемая процедура теперь коллективное упорядочение А по отношению к Б, поскольку А по-прежнему получает шесть баллов, а Б получает пять баллов.

Следовательно, при таком голосовании коллективное упорядочение А и Б зависит не только от того, как индивидуумы их упорядочивают, но также и от относительных позиций других альтернатив, таких как С.

Четвертую и пятую аксиомы лучше рассмотреть, введя некоторые обозначения.

Р - строгое коллективное предпочтение (аналогичное отношению «больше» между парой действительных чисел).

М - коллективное безразличие (аналогичное равенству).

Н - отношение слабого коллективного предпочтения (аналогичное отношению «больше или равно»).

Таким образом, выражение $A \succ B$ означает «А коллективно по меньшей мере так же хорошо, как Б», т.е. либо $A \succ B$, либо $A \sim B$.

Четвертая аксиома Эрроу.

Аксиома полноты: для каждой пары альтернатив А и Б должно выполняться $A \succ B$, либо $B \succ A$ (либо оба вместе; в этом случае А и Б безразличны). Согласно этой аксиоме, для процедуры объединения требуется упорядочить каждую пару альтернатив. Коль скоро конституция имеет возможность объявить любую пару альтернатив безразличной, полнота является, по-видимому, относительно безобидным требованием.

Пятая аксиома Эрроу (н-транзитивность).

Она требует, чтобы слабое коллективное предпочтение было транзитивно: формально если $A \succ B$ и $B \succ C$, то $A \succ C$. Примеры транзитивных отношений над парами действительных чисел: «больше» ($>$), «равно» ($=$) и «больше или равно» (\geq). Так, если число А больше, чем Б, и Б больше, чем С, то А должно быть больше, чем С. В экономических исследованиях полнота и н-транзитивность являются условными соглашениями и индивидуумы, чьи предпочтения удовлетворяют этим аксиомам, называются «рациональными». Эрроу расширил это понятие до понятия «коллективная рациональность» для описания конституций, удовлетворяющих аксиомам полноты и н-транзитивности. Он ввел р-транзитивность для обеспечения независимости выбранной альтернативы от последовательности, т.е. пути которым она достигается.

Р-транзитивные конституции - это такие правила голосования, при которых из $A \succ B$ и $B \succ C$ следует $A \succ C$. Все такие конституции, удовлетворяющие другим аксиомам Эрроу, нейтральны, т.е.

они упорядочивают пары альтернатив по одному и тому же критерию. Нейтральность означает, что если из частной конфигурации упорядочений голосующими альтернатив U и V следует, что U коллективно предпочитается V , то из той же конфигурации упорядочений A и B следует, что A коллективно предпочитается B . Описывается доказательство этого факта для двух голосующих. Предположим что для альтернатив U и V Энн преобладает над Биллом при этой конституции, если она U предпочитает V . Альтернативы A и B они упорядочивают по-разному. Для такой конфигурации по аксиоме единогласия Эрроу ArU , по предложению, что Энн преобладает над U против V , UrV и в силу аксиомы единогласия VrU . При r -транзитивности следует, что ArB для этой частной конфигурации предпочтения. Аксиома независимости Эрроу, однако, позволяет сделать более общее заключение, чем то, что Энн преобладает для A против B , независимо от позиций U и V в ее упорядочении или упорядочении Билла. (Аксиома независимости устанавливает, что коллективное упорядочение любой пары альтернатив зависит только от предпочтений голосующих, касающихся этих двух альтернатив.)

Определив и обосновав эту систему пяти желательных свойств, Эрроу доказал, что **единственные конституции, удовлетворяющие всем этим свойствам, обладают простым и удивительным недостатком: каждая из них является правилом диктатора. Диктатор - это личность, обладающая властью навязывать обществу свое строгое предпочтение для любой пары альтернатив.** Эрроу сформулировал свою теорему в несколько иной форме. Он добавил шестую аксиому, об отсутствии правила диктатора, и доказал, что не существует конституции, которая удовлетворяла бы всем шести аксиомам. По этой причине вывод Эрроу часто называют «теорема невозможности».

Таким образом, составителю процедуры голосования для законодательных органов, комитетов и клубов, который принимает эти условия в качестве необходимых свойств конституции, просто не везет. Внешние скромные требования Эрроу имеют веские и неприятные последствия. Как показывает его теорема невозможности, пять этих свойств очень ограничительны; хотя они и **привлекательны по отдельности, в комбинации они пагубны.** Теоретики, исследующие процедуры голосования, приложили немало усилий для пересмотра этих аксиом в поисках обходного пути, чтобы избежать неудобных выводов Эрроу.

Вполне оправданным считается довод, что аксиома универсальности слишком претенциозна. Не все логически возможные конфигурации упорядочения предпочтений являются одинаково вероятными. Поскольку некоторые конфигурации могут быть крайне неправдоподобными, требование, чтобы конституция непротиворечиво объединяла все логически возможные конфигурации для получения коллективного упорядочения, по-видимому, чрезмерно сильное. Наиболее распространенная стратегия для ослабления этого требования состояла в том, чтобы, сосредоточившись на какой-нибудь частной процедуре, например, принципе большинства, поискать ограничения, которые исключают те конфигурации предпочтения, из которых следует нетранзитивное коллективное предпочтение. Например, если могут возникнуть лишь те конфигурации предпочтений, в которых нет разногласий между индивидуумами, то аксиома универсальности определяла бы коллективные предпочтения и проблема нетранзитивности не могла бы возникнуть. Хорошо известное нетривиальное ограничение, обнаруженное в 40-е годы английским экономистом Данкэном Блэйком, состоит в том, что выбор производится согласно единственному критерию. В этом случае при любом попарном выборе каждый индивидуум голосует за альтернативу, наиболее близкую к его излюбленной позиции. Например, каждый избиратель может упорядочить кандидатов в соответствии с тем, насколько близко они находятся к его собственной позиции в политическом спектре от либерализма до консерватизма. Таким образом, если кандидат A более либерален, чем B , а B либеральнее, чем C , общество с единственным критерием выбора, содержащее либералов (A, B, C), консерваторов (C, B, A) и умеренных (B, A, C или B, C, A), не должно содержать индивидуумов, для которых средняя альтернатива расположена за двумя крайними (A, C, B и C, A, B). Если можно ожидать на практике единственность критерия, то этот случай хорошо подчиняется принципу большинства. Однако обычно избиратели упорядочивают кандидатов в соответствии со многими критериями, и поэтому случай одного критерия не осуществляется.

В более общем случае стратегия наложения ограничений на конституции может быть успешной, только если эти ограничения правдоподобны в смысле теории образования

предпочтений или теории предпочтений. Однако специалисты в области общественных наук не преуспели в деле формального моделирования роли социализации в развитии вкусов и системы ценностей, а также степени близости предпочтений, необходимой для социальной стабильности.

Таким образом, несмотря на значительные усилия, еще не сформулированы характеристики возможных способов упорядочения, достаточно широкие, чтобы охватить реальные предпочтения избирателей, и в то же время достаточно узкие, чтобы избежать выводов о правиле диктатора.

Возможность отказаться от аксиомы единогласия не вызвала большого энтузиазма. При практическом пересмотре аксиома единогласия кажется довольно слабым требованием, налагаемым на механизм объединения индивидуальных предпочтений для образования коллективного предпочтения. Роберт Уилсон из Стэнфордского университета показал, что единственная дополнительная конституция, удовлетворяющая всем аксиомам Эрроу, кроме аксиомы единогласия, еще менее привлекательна, чем правило диктатора. В частности, появляются две новые возможности. Первая возможность - это всеобщее безразличие, правило, согласно которому любая пара альтернатив постоянно безразлична относительно того, как индивидуумы их упорядочивают. Вторая возможность - это «диктатура наизнанку», правило, при котором за коллективное упорядочение принимается некоторое обратное упорядочение индивидуальных предпочтений. Этот метод окажется полезным организованному обществу, только если найдется избиратель с безусловно плохим суждением.

Аксиома независимости вызвала на себя сильный огонь критики в первое десятилетие после того, как Эрроу опубликовал свои результаты, но сейчас критика этой аксиомы утихла. Оригинальное обоснование Эрроу этого условия состояло в том, что конституции, удовлетворяющие ей, могут быть приняты без предварительного сбора огромной информации о предпочтениях. Чтобы упорядочить альтернативы А и Б, нет нужды уточнять позицию С в индивидуальных упорядочениях. Конституции, которые нарушают эту аксиому, обычно очень громоздки, по крайней мере, в случае, когда имеется много альтернатив, поскольку надо получить много информации о предпочтениях, чтобы упорядочить даже небольшое число вероятных альтернатив. Кроме того, поскольку на коллективном упорядочении А и Б при конституции, в которой нарушена эта аксиома, отражаются индивидуальные упорядочения третьей альтернативы, часто избиратели могут воздействовать на результаты относительно А и Б посредством неправильного представления своих предпочтений относительно других альтернатив.

«Теоремы невозможности», начало которым положило знаменитое предположение Эрроу, определяют ограничения на общественный выбор правила для коллективного принятия решения. Эти ограничения суровы. **Три общепризнанные цели - коллективная рациональность, способность принимать решения и равенство власти - оказываются в непримиримом противоречии.** Если общество отказывается от коллективной рациональности, тем самым принимая необходимую произвольность и возможность оказывать влияние на нерациональные процедуры, то, по-видимому, принцип большинства обеспечит выбор, потому что с его помощью можно достичь две другие цели. Если общество настаивает на сохранении некоторой степени коллективной рациональности, оно может достигнуть равенства, приняв правило консенсуса, но только ценой крайней нерешительности. **Общество может увеличить способность принимать решения, концентрируя право вето во все более узком кругу индивидуумов; самое решающее правило, правило диктатора, является самым неравным.**